Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ) Γ΄ Λυκείου
Μαθηματικά προσανατολισμού

Εκφωνήσεις

97 Ασκήσεις

19-2-2023

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου

Αντίστροφη συνάρτηση

Θέμα 2ο

23196. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x)=\ln(x+1),\ x>-1$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1}. (Μονάδες 9)

23198. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-1,\ x\ge 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x)=(x+1)^2,\ x\ge -1$

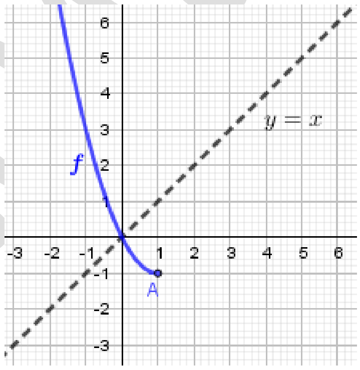
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}. (Μονάδες 9)

23209. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2-1,\ \ x\le 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 8)



23216. Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον x΄x. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x)>0$. (Μονάδες 10)

24569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=[0,1]$. (Μονάδες 05)

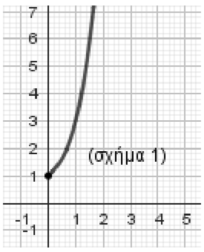
β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 10)

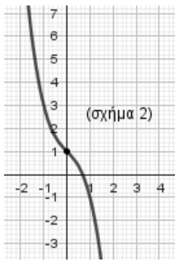
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x))=0,\ x\in[0,1]$. (Μονάδες 10)

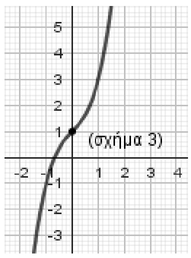
23642. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.







(Μονάδες 07)

γ) i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$. (Μονάδες 06)

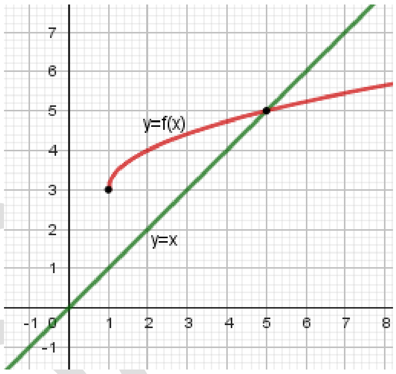
ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\left|x^3+x+1\right|=2023$. (Μονάδες 05)

24130. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{x-1}+3,\ \ x\geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f. (Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y=x$ της γωνίας xOy. Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1}. (Μονάδες 08)

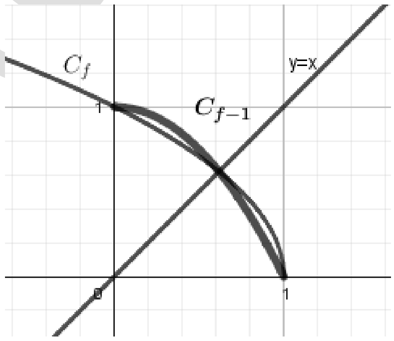


24703. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $x\in(-\infty,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}. (Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1}. Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)



24991. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-2\ln x+1,\ \ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}. (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=1-\ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο ισχύει $f=g$. (Μονάδες 08)

26602. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x)=x-2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h, με $h(x)=|g(x)|$. (Μονάδες 7)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h. (Μονάδες 10)

31528. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1-e^{-x}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 11)

Θέμα 4ο

23200. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \le f(\ln \alpha)$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1} + \ln x\right) = \ln 2$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3,\ x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

Όριο συνάρτησης στο x_0

Θέμα 2ο

24768. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=\sqrt{4x-3}$.

α) Να αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq\frac{3}{4}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x)=|2x-1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$.
(Μονάδες 10)

28477. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=e^{3x+2}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση gof. (Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x))=6x+4,\ x\in\mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0}\frac{(gof)(x)-\eta\mu^2x-4}{x}$. (Μονάδες 13)

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Θέμα 2ο

23217. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to1}g(x)$

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f\cdot g$ **ii.** το $\lim\limits_{x\to1}(f(x)\cdot g(x))$.

Όριο στο άπειρο

Θέμα 2ο

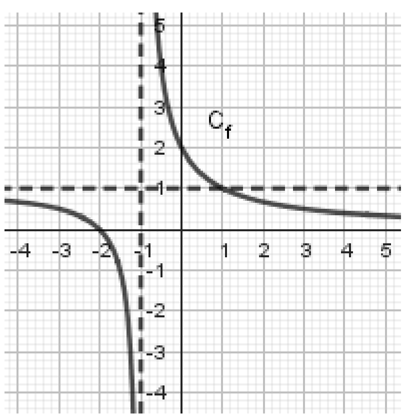
23641. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)<f(x)$. (Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2<\alpha$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[f(\alpha^2-\alpha)-f(0)\right]x\right)=-\infty$. (Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x-1)=f(0)$. (Μονάδες 08)

23314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη – 2. και τον άξονα y΄y σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 6) **ii)** $\lim\limits_{x\to-2^-}\ln(f(x))$ (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Συνέχεια Συνάρτησης

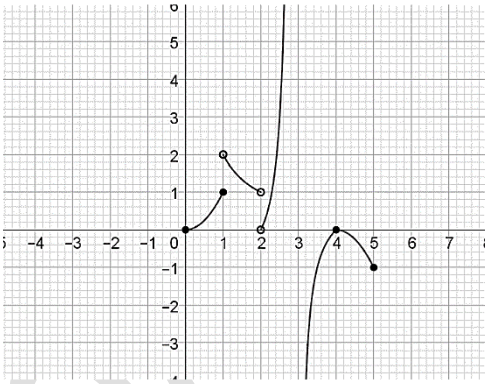
Θέμα 2ο

24767. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 12)

25749. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f=[0,2)\cup(2,3)\cup(3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι f(1)=1.



Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 10)

31548. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)-2x|\le(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1)=2$. (Μονάδες 10)

β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$. (Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1. (Μονάδες 5)

Θέμα 3ο

24761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2023-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2022$. (Μονάδες 10)

28684. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\kappa$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x)\le \eta\mu 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}=2$. (Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

“ $\left|f(x)\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}\right|=-f(x)\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ κοντά στο 0 ”

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 08)

Θεωρήματα Συνέχειας

Θέμα 4ο

23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε:

$(g\circ f)(x)=|\text{συν}x|$, για κάθε $x\in[0,\pi]$.

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)|=|\text{ημ}x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f. (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$. (Μονάδες 07)

Ορισμός παραγώγου

Θέμα 2ο

24756. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$. (Μονάδες 8)

24757. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°.

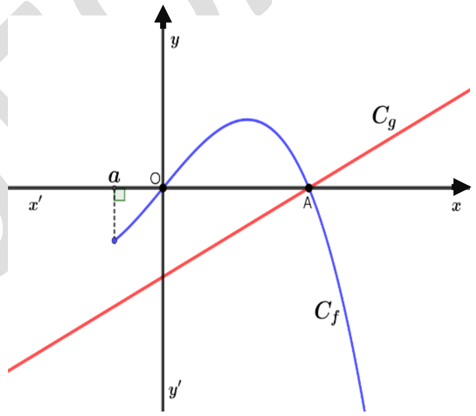
α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$. (Μονάδες 9)

25234. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2},\ x\in\mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα x'x εκτός από τα σημεία Ο και Α.



α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}$. (Μονάδες 9)

25762. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\le 0\\ \eta\mu x, & x>0\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $f'(0)=1$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$. (Μονάδες 7)

Κανόνες παραγώγισης

Θέμα 4ο

23375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 06)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x,\ x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε:

$(g\circ f)(x)=|\text{συν}x|$, για κάθε $x\in[0,\pi]$.

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)|=|\text{ημ}x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. (Μονάδες 03)

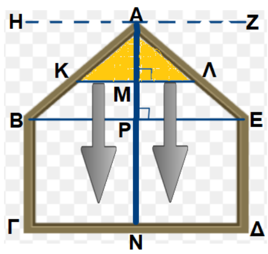
β) Να βρείτε την συνάρτηση f. (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\dfrac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim\limits_{x\to0}h(x)$. (Μονάδες 07)

Ρυθμός μεταβολής

Θέμα 4ο

25257. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο ΒΓΔΕ και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ. Είναι $AP=0{,}8$ m, $BE=1{,}6$ m, $AM=x$ m, $B\Gamma=1$ m. Το ορατό κάτω μέρος ΚΛ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση ΗΖ, με σταθερό ρυθμό, ώστε το Μ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΝ (με $AM\neq0$). Αν $E=E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό Ε, ισχύει

$$E(x)=\begin{cases} x^2 &, \text{ αν } x\in\left(0,\dfrac{4}{5}\right) \\ \dfrac{8}{5}x-\dfrac{16}{25}, & \text{ αν } x\in\left[\dfrac{4}{5},\dfrac{9}{5}\right]\end{cases}, \text{ σε } m^2.$$ (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς x, όταν $x=\dfrac{4}{5}$ m, είναι ίσος με $E'\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{8}{5}\ m^2/m$. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x=\dfrac{4}{5}$ m, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t)=0{,}08$ m/s για κάθε $t\geq0$. (Μονάδες 08)

28685.α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

(Μονάδες 08)

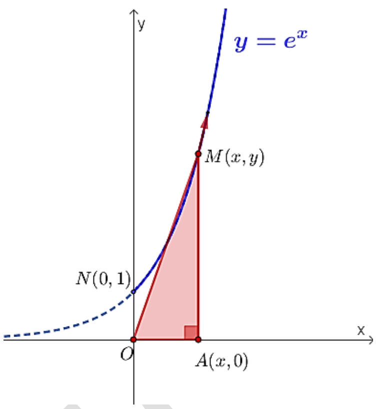
β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2 cm/sec$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$.

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε είναι $3e^2 cm^2/sec$.

(Μονάδες 10)



Θεώρημα Rolle

Θέμα 2ο

31643. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 13)

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θέμα 2ο

24283. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1,2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2,5] \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$. (Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$. (Μονάδες 06)

Θέμα 4ο

29150. Η συνάρτηση $x(t) = (t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διένυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)

Σταθερή συνάρτηση

Θέμα 4ο

23199. στω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}$ και $f(e)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

Μονοτονία συνάρτησης

Θέμα 2ο

23937. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 08)
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $A(1,f(1))$. (Μονάδες 09)

25764. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\geq 0\\ x^3, & x<0\end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o=0$. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

29211. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=1-\frac{1}{x^2},\ x<0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)
γ) **i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 – 1". (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}. (Μονάδες 07)

Θέμα 4ο

23376. Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ και
- $g(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. (Μονάδες 07)
β) Να αποδείξετε ότι:
i. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)
ii. η συνάρτηση h είναι "1-1". (Μονάδες 06)
γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0,\ x>0$. (Μονάδες 08)

32524. Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{e}{x}-\ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$. (Μονάδες 07)

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

23197. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

25761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x(\ln x-1)+1,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x+1=x$. (Μονάδες 12)

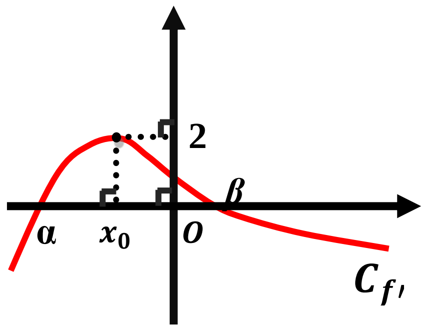
32390. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x+2,\ \ x\in[0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

Θέμα 4ο

23210. Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα x′x η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1)-f(x)\le 2$. (Μονάδες 8)

23311. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=\frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\,m/sec$. (Μονάδες 05)

24579.Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$.

α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

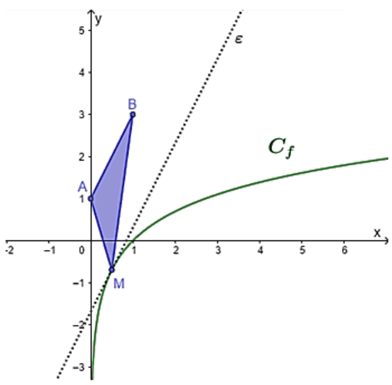
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 07)

27650. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x>0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α) i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x)=\frac{1}{2}(2x+1-\ln x),\ x>0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)



γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A. (Μονάδες 07)

24587.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,|x_0-\ln x_0|$.

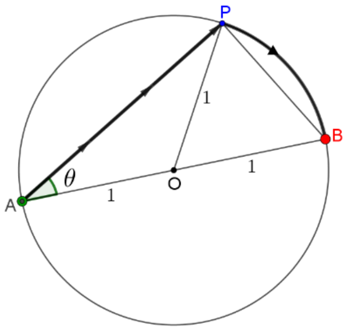
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y=x$, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,(x_0-\ln x_0)$. (Μονάδες 05)

β) i. Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

28532. Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας $1\ \text{Km}$ και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η ΑΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΡ έχοντας ταχύτητα $3\ \text{Km}/\text{h}$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου ΡΒ με ταχύτητα $6\ \text{Km}/\text{h}$.



Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $\hat{PAB}$ είναι θ rad.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{AP}) = 2\text{συν}\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι

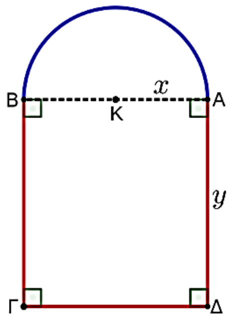
$f(\theta) = \frac{1}{3}(2\text{συν}\theta + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$. (Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία x rad σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

28534. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4m, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(\text{AK}) = x\ \text{m}$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(\text{AΔ}) = y\ \text{m}$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



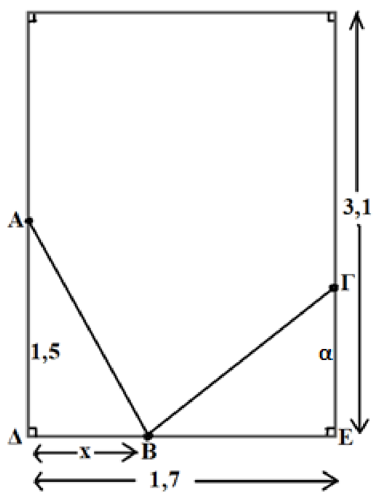
α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2 + 4x$, με

$x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$. (Μονάδες 8)

31680. Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος $3{,}1$ μέτρα και πλάτος $1{,}7$ μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\text{ΔB} = x$, $\text{ΔE} = 1{,}7$, $\text{AΔ} = 1{,}5$, $\text{ΓE} = \alpha$ και $L = \text{AB} + \text{BΓ}$ που εκφράζονται σε μέτρα.



α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2{,}25} + \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}$,

$x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$. (Μονάδες 07)

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει $1{,}02$ μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+2,25}}-\sqrt{\dfrac{(1,7-x)^2}{(1,7-x)^2+\alpha^2}}$, $x\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha=1$. (Μονάδες 10)

ii. Αν $L''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1,02}\dfrac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

(Μονάδες 08)

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Θέμα 2ο

31527. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+3x^2-8,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μόρια 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το Α, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε). (Μόρια 8)

Θέμα 4ο

23312. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε: f συνεχής στο $[-2, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$, για κάθε $x\in[-2, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 08)

β) Αν $f(0)=3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2=4-x^2$, για κάθε $x\in[-2, 2]$ και κατόπιν ότι $f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2, 2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$.

(Μονάδες 08)

23531. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)<0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(f(x))^{2023}}{f(x)-f(x_0)}$. (Μονάδες 9)

24760. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x,\ x>0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $e-\lambda=e^e-1-\lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(1,e)$ με $f'(x_0)=0$. (Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$. (Μονάδες 7)

25745. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(0)=f(2)$ και $(f'(x))^2+f(x)f''(x)<0$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

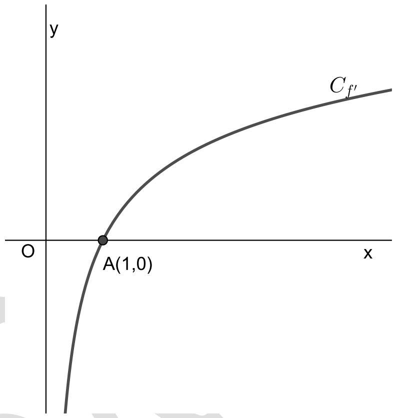
i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 8)

27320. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f. (Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$ να ισούται με 2».

Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

27667. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \dfrac{x^2}{2} + 2023, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 05)

ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ. (Μονάδες 05)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x) = \alpha x - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$. (Μονάδες 09)

31549. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$. (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται $e \simeq 2,71$.

31550. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

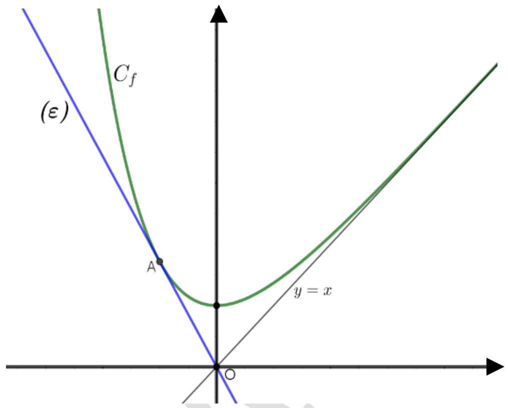
γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\dfrac{1}{x_o} + x_o$. (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

Κανόνες De L' Hospital- Ασύμπτωτες
Θέμα 2ο

23530. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία y = x είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1)=e-1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1)=1-e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{f(x)}$. (Μονάδες 8)

24755. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$. (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$. (Μονάδες 5)

25748. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$. (Μονάδες 8)

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$. (Μονάδες 9)

31547. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι
i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8) **ii.** παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

Θέμα 4ο

24759. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\frac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. (Μονάδες 5) **ii.** η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

29130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)

ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)-x=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y=x$. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 06)

Αρχική συνάρτηση
Θέμα 4ο

24769. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o=1$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\dfrac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$. (Μονάδες 5)

Υπολογιστικά ολοκληρώματα
Θέμα 4ο

23957. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\ln^2 x}$, $x>0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1 . (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^e \dfrac{2\ln x\cdot f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx$. (Μονάδες 10)

24770. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)+x-1$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o=\ln 2$. (Μονάδες 5)

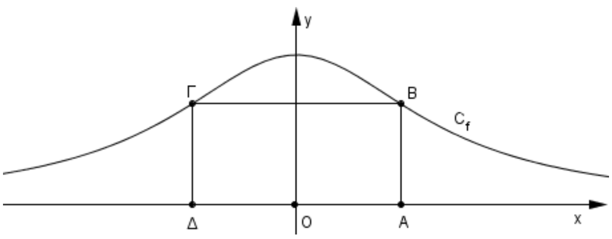
ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln\left(e^x-1\right)\leq 2x-\ln 4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\dfrac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$. (Μονάδες 8)

24771. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $\left(x^2+1\right)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α, $\alpha>0$ του σημείου $A(\alpha,0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$E(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, $\alpha>0$. Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

26184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x=e^2$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e^2} f(x)dx$. (Μονάδες 9)

27321. Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y=f(x)=\alpha x e^{-\beta x}$, $x\in(0,+\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta\in(0,1)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y; (Μονάδες 9)

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f. Να αποδείξτε ότι

$F(\beta)-F(2\beta)=\dfrac{\alpha}{\beta^2}\cdot\dfrac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$. (Μονάδες 9)

27322. Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$T(t)=E+(T_0-E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E<T_0$.
- $T_0=T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t)=k\left[E-T(t)\right]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\left(E-T(t)\right)\cdot\ln\left(T(t)\right)dt$ ισούται με $\dfrac{2e^3-3e^4}{k}$ αν είναι $T(0)=e^4$ και $T(1)=e^3$. (Μονάδες 10)

27668. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ με $1<\lambda<3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 08)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)=-f(4-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$. (Μονάδες 05)

29549. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε: $f'(0)=f(0)=0$ και $\int_0^\pi \left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx=-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$. (Μονάδες 07)

β) $f(\pi)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Στο διάστημα $(0,\pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής. (Μονάδες 10)

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Θέμα 4ο

23219. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx>1$. (Μονάδες 6) **ii.** $\int_0^1 xf'(x)dx<1$. (Μονάδες 6)

24758. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$. (Μονάδες 6)

β) $f'(1)\geq 0$ και $f'(-1)\leq 0$. (Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^1 (x^3-3x)f'(x)dx\leq 0$. (Μονάδες 6)

25766. Στον διπλανό πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f(0)=1$ και $f(2)=5$ τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=|x^2-4|+5$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$. (Μονάδες 5)

31551. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} &, x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]\\ 1 &, x=0\end{cases}$

και $\varphi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa}\varphi(x)dx=0$. (Μονάδες 5)

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Θέμα 4ο

23218. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+3x^2-\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K. (Μονάδες 6)

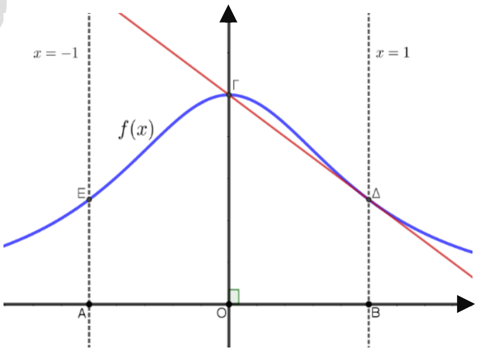
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $K(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1,x_2, με $x_1<-1<x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_1, x=-1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_2, x=-1$. (Μονάδες 8)

23955. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα x'x στα σημεία A και B αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1}f(x)dx>\dfrac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

24275. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1,\ x=\rho$ ισούται με $E(\Omega)=-\dfrac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

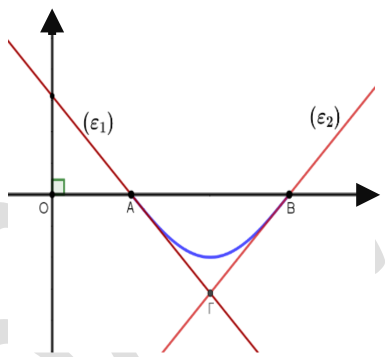
24704. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$. (Μονάδες 10)

25235. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2},f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών (ε_1), (ε_2) είναι $(\varepsilon_1): y=-x+\frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y=x-\frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}}$. (Μονάδες 8)

25259. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon: y=\frac{1}{4}$, στο $x_0=0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1)=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0)=\frac{1}{4}$ και $f'(0)=0$. (Μονάδες 06) **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=0$. (Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$. (Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$. (Μονάδες 06)

25746. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x<0$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)$. (Μονάδες 7)

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $E<f(1)$. (Μονάδες 6)

25747. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0,2]$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0,2]$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

25757. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \alpha\nu\ 0 \le x < 1 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 09)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $0 \le f(x) \le 1 - x$. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0,\ x = 1$ ισχύει $E < \dfrac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

25765. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x,\ x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \ne 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|},\ x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1,\ x = 1$. (Μονάδες 6)

26183. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & 0 \le x \le 1 \\ 1 - \dfrac{4\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

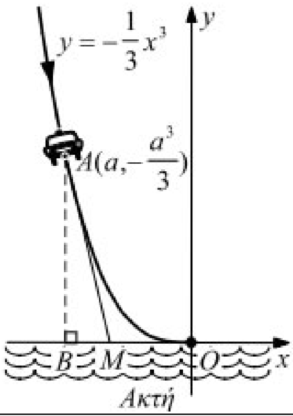
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \dfrac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 10)

27031. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\dfrac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

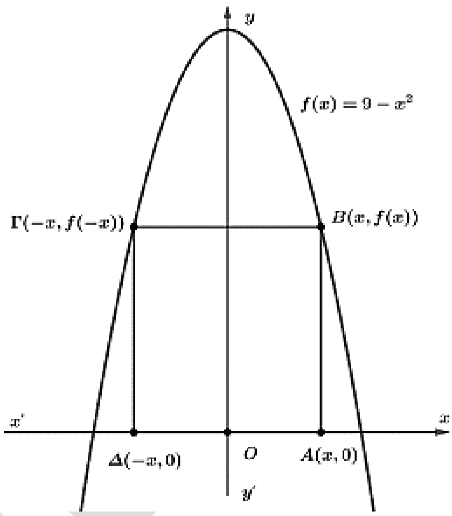


α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α. (Μονάδες 06)

β) i. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\dfrac{1}{3}x^3,\ x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).
Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του

σημείου Μ της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3. (Μονάδες 08)
ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ. (Μονάδες 02)
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3. (Μονάδες 09)

27408. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=9-x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα x΄x είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.
Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα x΄x, ενώ οι κορυφές $B(x,f(x))$ και $\Gamma(-x,f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x\in[0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=18x-2x^3$. (Μονάδες 6)
β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)
γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 6)
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, του άξονα x΄x και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

28476. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x\to1}\frac{f(x)(x-1)}{\ln x}=0$ και $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$. (Μονάδες 03)
ii. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$. (Μονάδες 03)
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (Μονάδες 06)
γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ε, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και των ευθειών $x=0$ και $x=1$. (Μονάδες 07)

31148. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=e^{-x}$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)
β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x,f(x))$ και $\Gamma(x,g(x))$ με $x>0$. Η παράλληλη ευθεία από το Β προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Ζ.

i. Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΖΔ είναι $E(x)=\frac{x^3}{e^x}$, $x>0$. (Μονάδες 6)
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$h(x)=\dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\ln 2$ και $x=1$, είναι $\ln\sqrt{2e}-\dfrac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

31149. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1+f(x))-\ln(f(x))>f^2(x)\cdot f(\ln 2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες με εξισώσεις $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$ και τον άξονα x'x είναι $\ln\left(\dfrac{27}{4e}\right)$. (Μονάδες 9)

31530. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) **i.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1). (Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1. (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός. (Μονάδες 9)

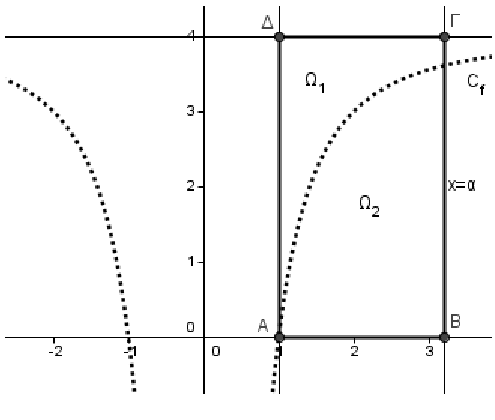
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο A(1, 4) και την κατακόρυφη ευθεία $x=2$. (Μονάδες 7)

31533. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-\dfrac{4}{x^2}$, $x\neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f. (Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1x_2=-4$. (Μονάδες 6)

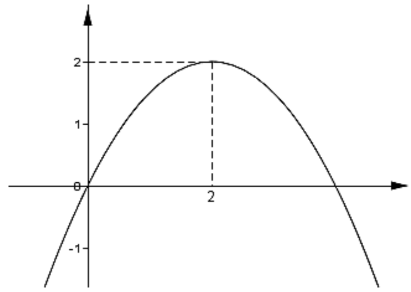
γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$, $\alpha>1$ και $y=4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2.



i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)$. (Μονάδες 5)

31534. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο K(2, 2) και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 1), να αποδείξετε ότι
$f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+1$.

(Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x)=x^2+x+1-ημx$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x>0$. (Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.

(Μονάδες 5)